C38212

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3ème année**
INFORMATIQUE
Session 2008

Épreuve d'INFORMATIQUE II

Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en précisant les initiatives qu'il est amené à prendre.

Informatique II

Ce sujet aborde des questions de complétude pour une extension du calcul propositionnel. Les questions peuvent être résolues en admettant les résultats des questions précédentes. Les questions des parties I et II sont indépendantes.

Les algorithmes peuvent être donnés dans la notation de votre choix du moment qu'elle soit suffisamment précise. Pour chaque algorithme proposé, il est indispensable de justifier précisément sa correction et de donner sa complexité en temps en choisissant les paramètres pertinents.

Dans la suite, tout texte en italique indique soit un point important, soit l'introduction d'une nouvelle définition.

PRÉLIMINAIRES

Soit $\mathrm{VAR} = \{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \ldots\}$ un ensemble infini dénombrable de variables propositionnelles comme celle utilisées dans le calcul propositionnel. L'ensemble des *formules de chemin* est défini par la grammaire ci-dessous :

$$\mathrm{A} ::= \mathrm{p} \mid \neg\mathrm{A} \mid \mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \mid \mathrm{A} \vee \mathrm{A} \mid \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} \mid \Box\mathrm{A}.$$

où p est une variable de VAR. Les formules sont notées avec les symboles A, B et C, éventuellement indicés. Il s'agit essentiellement d'une extension des formules du calcul propositionnel où on autorise le nouvel opérateur unaire $\Box$. L'opérateur unaire $\neg$ est interprété comme la négation, les opérateurs binaires $\vee$, $\wedge$ et $\Rightarrow$ sont respectivement interprétés comme des opérateurs de disjonction, conjonction et d'implication. Quant à l'opérateur $\Box$, la formule $\Box\mathrm{A}$ sera interprétée par "tous les états atteignables à partir de l'état courant vérifient la formule A". Une sémantique formelle sera donnée dans la suite.

Comme les opérateurs $\vee$ et $\Rightarrow$ peuvent être définis à partir de $\neg$ et $\wedge$, dans les preuves par induction structurelle, seuls les cas pour $\neg$, $\wedge$ et $\Box$ seront demandés dans les réponses.

L'ensemble des *sous-formules* d'une formule A, noté $\mathrm{sub}(\mathrm{A})$, admet la définition récursive suivante.

- $\mathrm{sub}(\mathrm{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{p}\}$ où $\mathrm{p} \in \mathrm{VAR}$,
- $\mathrm{sub}(\circ\mathrm{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\circ\mathrm{A}\} \cup \mathrm{sub}(\mathrm{A})$ pour tout opérateur unaire $\circ$,
- $\mathrm{sub}(\mathrm{A}_1 \circ \mathrm{A}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{A}_1 \circ \mathrm{A}_2\} \cup \mathrm{sub}(\mathrm{A}_1) \cup \mathrm{sub}(\mathrm{A}_2)$ pour tout opérateur binaire $\circ$.

La *taille* d'une formule, notée $|\mathrm{A}|$, admet la définition récursive suivante.

- $|\mathrm{p}| \stackrel{\text{def}}{=} 1$ où $\mathrm{p} \in \mathrm{VAR}$,
- $|\circ\mathrm{A}| \stackrel{\text{def}}{=} 1 + |\mathrm{A}|$ pour tout opérateur unaire $\circ$,
- $|\mathrm{A}_1 \circ \mathrm{A}_2| \stackrel{\text{def}}{=} 1 + |\mathrm{A}_1| + |\mathrm{A}_2|$ pour tout opérateur binaire $\circ$.

QUESTION 1. Evaluer le cardinal de $\mathrm{sub}(\mathrm{A})$ en fonction de la taille de A.

PARTIE I

Soit A une formule construite sur au moins les n variables $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ et soient n formules $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$. On note $\mathrm{C} = \mathrm{A}[\mathrm{p}_1 \leftarrow \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{p}_n \leftarrow \mathrm{B}_n]$ la formule obtenue à partir de A en remplaçant simultanément chaque occurrence de la variable p_i par B_i. On dit alors que la formule C est une *instance* de A. Par exemple,

$$(\Box(\Box\mathrm{p} \Rightarrow \Box\mathrm{p}) \wedge \Box\Box\mathrm{p}) \Rightarrow \Box\Box\mathrm{p}$$

est une instance de $(\Box(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \wedge \Box\mathrm{p}) \Rightarrow \Box\mathrm{q}$.

QUESTION 2. Evaluer la taille de $\mathrm{A}[\mathrm{p}_1 \leftarrow \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{p}_n \leftarrow \mathrm{B}_n]$ en fonction de $|\mathrm{A}|$ et de $max\{|\mathrm{B}_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Le système de déduction $\mathcal{H}$ est composé d'*axiomes* et de *règles de déduction*. Un axiome est une formule de chemin qui représente toutes ses instances. Une règle permet de dériver de nouvelles formules ; elle se compose de prémisses (une ou deux ici) et d'une conclusion (la nouvelle formule dérivée). Les axiomes de $\mathcal{H}$ sont les formules suivantes :

1. les tautologies du calcul propositionnel,
2. $\Box\mathrm{p}_1 \Rightarrow (\Box(\mathrm{p}_1 \Rightarrow \mathrm{p}_2) \Rightarrow \Box\mathrm{p}_2)$,
3. $\Box\mathrm{p}_1 \Rightarrow \mathrm{p}_1$,
4. $\Box\mathrm{p}_1 \Rightarrow \Box\Box\mathrm{p}_1$.

Les règles de déduction sont les suivantes :

$$\frac{\mathrm{A} \quad \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}}{\mathrm{B}}\ (\text{modus ponens}) \qquad \frac{\mathrm{A}}{\Box\mathrm{A}}\ (\text{necessitation})$$

Une *dérivation* dans $\mathcal{H}$ à partir d'un ensemble Γ de formules est une séquence finie $\langle \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \rangle$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\mathrm{A}_i \in \Gamma$, soit A_i est une instance d'un axiome de $\mathcal{H}$, soit il existe $j < i$ tel que $\mathrm{A}_i = \Box\mathrm{A}_j$, soit il existe $j, j' < i$ tels que $\mathrm{A}_{j'}$ est égale à $(\mathrm{A}_j \Rightarrow \mathrm{A}_i)$. On note alors $\Gamma \vdash \mathrm{A}_n$. Par définition, une formule A est un *théorème* de $\mathcal{H}$ lorsque $\emptyset \vdash \mathrm{A}$ (aussi noté $\vdash \mathrm{A}$).

Dans la suite, on utilisera les propriétés suivantes (sans avoir à les démontrer) :

(P0) $\vdash (\Box\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \Box\mathrm{A}_n) \Rightarrow \Box(\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n)$,

(P1) $\vdash \Box(\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n) \Rightarrow (\Box\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \Box\mathrm{A}_n)$,

(P2) $\vdash (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow \neg(\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B})$,

(P3) Si $\vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ et $\vdash \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}$ alors $\vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}$.

QUESTION 3. Montrer que si $\vdash \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ alors $\vdash \Box\mathrm{A} \Rightarrow \Box\mathrm{B}$. On pourra utiliser que $(\mathrm{p}_1 \Rightarrow (\mathrm{p}_2 \Rightarrow \mathrm{p}_3)) \Rightarrow (\mathrm{p}_2 \Rightarrow (\mathrm{p}_1 \Rightarrow \mathrm{p}_3))$ est une tautologie du calcul propositionnel.

Cette partie a pour but de donner une sémantique aux théorèmes de $\mathcal{H}$. Un graphe d'états est une structure $G = \langle S, R, L \rangle$ où S est un ensemble d'*états* (éventuellement infini), $R \subseteq S \times S$ est la *relation de transition* et $L : S \rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{VAR})$

est la *fonction d'étiquetage*. $\mathcal{P}(\mathrm{VAR})$ désigne l'ensemble des parties de VAR. On note R^* la fermeture réflexive et transitive de la relation R. Le graphe d'états G peut par exemple modéliser le graphe des états d'un programme. Les formules de chemin sont interprétées sur les graphes d'états. "L'état s vérifie la formule A dans le graphe G", noté "$G, s \models \mathrm{A}$", est défini inductivement ainsi :

- $G, s \models \mathrm{p} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{p} \in L(s)$,
- $G, s \models \neg\mathrm{A} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G, s \models \mathrm{A}$ n'est pas vérifié,
- $G, s \models \mathrm{A}_1 \wedge \mathrm{A}_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G, s \models \mathrm{A}_1$ et $G, s \models \mathrm{A}_2$,
- $G, s \models \mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G, s \models \mathrm{A}_1$ ou $G, s \models \mathrm{A}_2$,
- $G, s \models \mathrm{A}_1 \Rightarrow \mathrm{A}_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ si $G, s \models \mathrm{A}_1$ alors $G, s \models \mathrm{A}_2$,
- $G, s \models \Box\mathrm{A} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour tous les états $s' \in \{s'' \in S : \langle s, s'' \rangle \in R^*\}$, on a $G, s' \models \mathrm{A}$.

Une formule de chemin A est *satisfaisable* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe un graphe d'états $G = \langle S, R, L \rangle$ et $s \in S$ tels que $G, s \models \mathrm{A}$. Une formule A est dite *valide* si et seulement si $\neg\mathrm{A}$ n'est pas satisfaisable.

QUESTION 4. On note $\Box^i$ une séquence de $i \geq 1$ occurrences successives de l'opérateur $\Box$. Par exemple, $\Box^1\mathrm{p}$ est égale à $\Box\mathrm{p}$, $\Box^2\mathrm{p}$ est égale à $\Box\Box\mathrm{p}$ et par convention on pose $\Box^0\mathrm{p}$ égale à p. Montrer que pour $i \geq 0$, la formule $\Box\mathrm{p} \Rightarrow \Box^i\mathrm{p}$ est valide.

QUESTION 5. Montrer que tous les théorèmes de $\mathcal{H}$ sont valides.

Un ensemble de formules Γ est *consistant* s'il existe une formule A telle que $\Gamma \nvdash \mathrm{A}$ (absence de dérivation à partir de Γ contenant A), sinon Γ est *inconsistant*. Dans la suite, on pourra aussi utiliser (sans avoir à les démontrer) deux caractérisations d'un ensemble Γ inconsistant :

(INCONS1) Il existe une formule A telle que $\Gamma \vdash \mathrm{A}$ et $\Gamma \vdash \neg\mathrm{A}$.

(INCONS2) Il existe des formules $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \Gamma$ telles que $\vdash \neg(\mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_n)$.

Un ensemble de formules Γ est *maximal* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour toute formule A, on a $\mathrm{A} \in \Gamma$ ou $\neg\mathrm{A} \in \Gamma$.

QUESTION 6. Soit Γ un ensemble maximal et consistant. Montrer les propriétés ci-dessous.

1. Pour toute formule A, on a $\mathrm{A} \in \Gamma$ si et seulement si $\Gamma \vdash \mathrm{A}$.
2. Tous les théorèmes de $\mathcal{H}$ sont dans Γ.
3. Pour toutes les formules A, B, on a $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \in \Gamma$ si et seulement si $\mathrm{A} \in \Gamma$ et $\mathrm{B} \in \Gamma$.

QUESTION 7. Montrer que si Γ est consistant alors il existe un ensemble Γ^+ maximal et consistant tel que $\Gamma \subseteq \Gamma^+$. On pourra utiliser une énumération de toutes les formules de chemin et construire Γ^+ de façon incrémentale. De même, on pourra utiliser le fait que $\neg(\mathrm{p}_1 \wedge \mathrm{p}_2) \Rightarrow (\neg(\mathrm{p}_3 \wedge \neg\mathrm{p}_2) \Rightarrow \neg(\mathrm{p}_1 \wedge \mathrm{p}_3))$ est une tautologie du calcul propositionnel.

Le graphe de $\mathcal{H}$ est un graphe d'états $G_{\mathcal{H}} = \langle S_{\mathcal{H}}, R_{\mathcal{H}}, L_{\mathcal{H}} \rangle$ défini ainsi :

- $S_{\mathcal{H}}$ est l'ensemble des ensembles maximaux et consistants.
- Pour tous les $\Gamma, \Gamma' \in S_{\mathcal{H}}$, on a $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_{\mathcal{H}} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ pour toute formule A, si $\Box \mathrm{A} \in \Gamma$ alors $\mathrm{A} \in \Gamma'$.
- Pour tout $\Gamma \in S_{\mathcal{H}}$, on pose $L_{\mathcal{H}}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{p} \in \mathrm{VAR} : \mathrm{p} \in \Gamma\}$.

QUESTION 8. Soit $\Gamma \in S_{\mathcal{H}}$ tel que $\Box \mathrm{A} \notin \Gamma$. Montrer qu'il existe un état $\Gamma' \in S_{\mathcal{H}}$ tel que $\langle \Gamma, \Gamma' \rangle \in R_{\mathcal{H}}$ et $\neg \mathrm{A} \in \Gamma'$.

QUESTION 9. Montrer que pour toute formule A et pour tout état $\Gamma \in S_{\mathcal{H}}$, on a $\mathrm{A} \in \Gamma$ si et seulement si $G_{\mathcal{H}}, \Gamma \models \mathrm{A}$.

QUESTION 10. Prouver que $R_{\mathcal{H}}$ est égale à sa fermeture réflexive et transitive, c'est-à-dire $R_{\mathcal{H}} = R^*_{\mathcal{H}}$.

QUESTION 11. Montrer que A est valide si et seulement si A est un théorème.

QUESTION 12. Montrer que A est satisfaisable si et seulement si il existe un état $\Gamma \in S_{\mathcal{H}}$ tel que $\mathrm{A} \in \Gamma$.

QUESTION 13. Soit $\mathcal{H}'$ le système obtenu à partir de $\mathcal{H}$ en ajoutant l'axiome $\mathrm{p_1} \Rightarrow \Box\neg\Box\neg\mathrm{p_1}$. Montrer que A est un théorème de $\mathcal{H}'$ si et seulement si pour tous les graphes d'états $G = \langle S, R, L \rangle$ tels que R est symétrique, et pour tous les états $s \in S$, on a $G, s \models \mathrm{A}$. On rappelle que R est symétrique si et seulement si pour tous les $x, y \in S$, si $\langle x, y \rangle \in R$ alors $\langle y, x \rangle \in R$.

QUESTION 14. Soit A une formule. Le graphe $G^{\mathrm{A}} = \langle S, R, L \rangle$ est défini ainsi :
- $S = \{\Gamma \cap \mathrm{sub(A)} : \Gamma \in S_{\mathcal{H}}\}$,
- $\langle X, Y \rangle \in R$ si et seulement si pour chaque $\Box \mathrm{B} \in \mathrm{sub(A)}$, $\Box \mathrm{B} \in X$ implique $\Box \mathrm{B} \in Y$,
- $L(X) = \{\mathrm{p} \in \mathrm{VAR} : \mathrm{p} \in X\}$.

Montrer que pour $X \in S$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{sub(A)}$, on a $\mathrm{B} \in X$ si et seulement si $G^{\mathrm{A}}, X \models \mathrm{B}$.

QUESTION 15. Donner un algorithme permettant de déterminer si une formule de chemin est satisfaisable.

PARTIE II

Un séquent $\mathbf{a} = \langle \Gamma, \Delta \rangle$ est une paire d'ensembles finis de formules. Le séquent $\langle \Gamma, \Delta \rangle$ sera noté dans la suite $\Gamma \vdash \Delta$ (on fait un usage du symbole '$\vdash$' différent de celui de la partie I) et Δ, A dénote l'ensemble $\Delta \cup \{\mathrm{A}\}$: la virgule "," joue le rôle d'opérateur d'union ensembliste. De même, A, B dans un séquent correspond à $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. Les expressions $\Gamma, \mathrm{A}, \mathrm{A} \vdash \Delta$ et $\Gamma, \mathrm{A} \vdash \Delta$ représentent donc le même séquent. Un *séquent axiome* est un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ tel que $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Le calcul $\mathcal{SQ}$ est composé de l'ensemble des séquents axiomes et des règles d'inférence ci-dessous :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \vdash) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ (\vdash \neg)$$

$$\frac{\Gamma, A_1, A_2 \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \vdash \Delta}\ (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \quad \Gamma \vdash \Delta, A_2}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \wedge A_2}\ (\vdash \wedge)$$

$$\frac{\Gamma, A_1 \vdash \Delta \quad \Gamma, A_2 \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \vee A_2 \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A_1, A_2}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \vee A_2}\ (\vdash \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \quad \Gamma, A_2 \vdash \Delta}{\Gamma, A_1 \Rightarrow A_2 \vdash \Delta}\ (\Rightarrow \vdash) \quad \frac{\Gamma, A_1 \vdash \Delta, A_2}{\Gamma \vdash \Delta, A_1 \Rightarrow A_2}\ (\vdash \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, \Box A, A \vdash \Delta}{\Gamma, \Box A \vdash \Delta}\ (\Box \vdash) \quad \frac{\Box\Gamma \vdash A}{\Sigma, \Box\Gamma \vdash \Box A, \Delta}\ (\vdash \Box)$$

Le nom de chaque règle est indiqué à droite de celle-ci. Dans la règle $(\vdash \Box)$, $\Box\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\Box B : \Box B \in \Gamma\}$. Dans les règles, Γ et Δ sont des métavariables qui vont être instanciées par des ensembles finis de formules tandis que A, A_1, et A_2 sont des métavariables qui vont être instanciées par des formules de chemin. Une inférence est définie comme une instanciation d'une règle, c'est-à-dire chaque métavariable est remplacée par un ensemble fini ou par une formule. Par exemple, les deux inférences ci-dessous sont des instances de la règle $(\wedge \vdash)$:

$$\frac{\{p_3, p_1, p_2\} \vdash \{p_4\}}{\{p_3, p_1 \wedge p_2\} \vdash \{p_4\}} \quad \frac{\{p_3, p_1 \wedge p_2, p_1, p_2\} \vdash \{p_4\}}{\{p_3, p_1 \wedge p_2\} \vdash \{p_4\}}$$

Remarquez la copie de "$p_1 \wedge p_2$" dans la seconde inférence.

Une *dérivation* de $\mathcal{SQ}$ est un arbre fini dont les noeuds sont étiquetés par des séquents telle que

- si un noeud est étiqueté par $\mathbf{a}_1$ et possède un unique noeud fils étiqueté par $\mathbf{a}_2$ alors il existe une règle unaire $\frac{\mathbf{a}'_2}{\mathbf{a}'_1}$ telle que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ est une instance de $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2$,
- si un noeud est étiqueté par $\mathbf{a}_1$ et possède deux noeuds fils étiquetés respectivement par $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ alors il existe une règle binaire $\frac{\mathbf{a}'_2 \quad \mathbf{a}'_3}{\mathbf{a}'_1}$ telle que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ est une instance de $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3$.

Par exemple $(\{p_1 \vee p_2, p_3 \wedge p_4\} \vdash \{p_5\})$, $(\{p_1 \vee p_2\} \vdash \{\neg(p_3 \wedge p_4), p_5\}))$ est une instance de $(\Gamma, A \vdash \Delta)$, $(\Gamma \vdash \neg A, \Delta)$ (voir la règle $(\vdash \neg)$) avec $\Gamma = \{p_1 \vee p_2\}$, $\Delta = \{p_5\}$ et $A = p_3 \wedge p_4$. Comme c'est la convention usuellement, on utilise ici une notion d'instance de règle qui diffère légèrement de la notion d'instance de formule de la partie I. Si de plus toutes les feuilles sont étiquetées par des séquents axiomes, cette dérivation est appelée une *preuve*. En général, on pourra représenter une dérivation avec la racine en bas et les feuilles en haut.

Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est *prouvable* dans $\mathcal{SQ}$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ il existe une preuve dont la racine est étiquetée par $\Gamma \vdash \Delta$. Un séquent qui n'est pas prouvable est *consistant* (notion

différente de celle de la partie I). La formule A est un *théorème* de $\mathcal{SQ}$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\emptyset \vdash \mathrm{A}$ est prouvable dans $\mathcal{SQ}$.

Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est *saturé* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
- si $\Box \mathrm{A}_1 \in \Gamma$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Gamma$,
- si $\mathrm{A}_1 \wedge \mathrm{A}_2 \in \Gamma$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Gamma$ et $\mathrm{A}_2 \in \Gamma$,
- si $\mathrm{A}_1 \wedge \mathrm{A}_2 \in \Delta$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Delta$ ou $\mathrm{A}_2 \in \Delta$,
- si $\neg \mathrm{A} \in \Gamma$ alors $\mathrm{A} \in \Delta$ et si $\neg \mathrm{A} \in \Delta$ alors $\mathrm{A} \in \Gamma$.
- si $\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2 \in \Delta$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Delta$ et $\mathrm{A}_2 \in \Delta$,
- si $\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2 \in \Gamma$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Gamma$ ou $\mathrm{A}_2 \in \Gamma$,
- si $\mathrm{A}_1 \Rightarrow \mathrm{A}_2 \in \Delta$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Gamma$ et $\mathrm{A}_2 \in \Delta$,
- si $\mathrm{A}_1 \Rightarrow \mathrm{A}_2 \in \Gamma$ alors $\mathrm{A}_1 \in \Delta$ ou $\mathrm{A}_2 \in \Gamma$.

Dans les preuves, on demande de ne traiter que les cas avec les règles $(\vdash \neg)$, $(\neg \vdash)$, $(\vdash \wedge)$, $(\wedge \vdash)$, $(\vdash \Box)$ *et* $(\Box \vdash)$.

QUESTION 16. Montrer que toutes les instances de $\Box \mathrm{p}_1 \Rightarrow (\Box(\mathrm{p}_1 \Rightarrow \mathrm{p}_2) \Rightarrow \Box \mathrm{p}_2)$, $\Box \mathrm{p}_1 \Rightarrow \mathrm{p}_1$ et de $\Box \mathrm{p}_1 \Rightarrow \Box\Box \mathrm{p}_1$ sont des théorèmes de $\mathcal{SQ}$.

QUESTION 17. On note $\mathrm{sub}(\Gamma)$ l'ensemble des sous-formules des formules de Γ défini par $\{\mathrm{B} : \mathrm{B} \in \mathrm{sub}(\mathrm{A}),\ \mathrm{A} \in \Gamma\}$. Montrer que si $\Gamma' \vdash \Delta'$ apparaît dans une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ alors $(\Gamma' \cup \Delta') \subseteq \mathrm{sub}(\Gamma \cup \Delta)$.

QUESTION 18. Montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans $\mathcal{SQ}$ alors il existe une preuve (arbre fini) dont chaque branche est de longueur au plus 2^{2N} où N est le cardinal de $\mathrm{sub}(\Gamma \cup \Delta)$.

QUESTION 19. Définir un algorithme permettant de déterminer si un séquent est prouvable dans $\mathcal{SQ}$. Evaluer le temps de calcul.

Nous allons à présent donner une sémantique aux théorèmes de $\mathcal{SQ}$.

QUESTION 20. Montrer par induction structurelle que $\Gamma, \mathrm{A} \vdash \mathrm{A}, \Delta$ a une preuve dont toutes les feuilles sont de la forme $\Gamma' \vdash \Delta'$ pour lesquelles il existe une variable propositionnelle p telle que $\mathrm{p} \in \Gamma' \cap \Delta'$.

Dans la suite, on se restreint aux preuves dont les séquents axiomes sont de la forme $\Gamma, \mathrm{p} \vdash \Delta, \mathrm{p}$ pour une variable propositionnelle $\mathrm{p} \in \mathrm{VAR}$. Une règle d'inférence est dite *inversible* si et seulement si pour chaque inférence de la règle, la conclusion est prouvable si et seulement si toutes les prémisses sont prouvables. Dans la suite on admettra que toutes les règles sauf $(\vdash \Box)$ sont inversibles.

Soit Π une dérivation du séquent $\mathbf{a} = \Gamma \vdash \Delta$. On note $\sigma = \Gamma_0 \vdash \Delta_0 <_{r_1} \Gamma_1 \vdash \Delta_1 <_{r_2} \cdots <_{r_n} \Gamma_n \vdash \Delta_n$ le segment initial d'une branche de Π avec $\mathbf{a} = \Gamma_0 \vdash \Delta_0$ et pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\Gamma_{i+1} \vdash \Delta_{i+1}$ est une prémisse d'une inférence de la règle r_{i+1} avec conclusion $\Gamma_i \vdash \Delta_i$. On utilise la notation suivante :
- $ant(\sigma) = \Gamma_0 \cup \cdots \cup \Gamma_n$ et $suc(\sigma) = \Delta_0 \cup \cdots \cup \Delta_n$,
- $prems(\sigma) = \mathbf{a}$ et $der(\sigma) = \Gamma_n \vdash \Delta_n$.

La séquence σ est dite *locale* si et seulement si aucune des règles r_i n'est $(\vdash \Box)$.
La séquence σ est dite *consistante* si et seulement si tous les séquents $\Gamma_j \vdash \Delta_j$ qui la composent sont consistants.
La séquence σ est dit *maximale* si et seulement si σ est locale et $ant(\sigma) \vdash suc(\sigma)$ est saturé.

QUESTION 21. Montrer que pour tout séquent consistant il existe une séquence maximale consistante ayant pour premier élément ce séquent.

Un *graphe* pour le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est une structure $\langle S, R\rangle$ telle que S est un ensemble de séquences maximales consistantes vérifiant les quatre propriétés ci-dessous.

- Pour tout $\sigma \in S$, $ant(\sigma) \cup suc(\sigma) \subseteq \mathrm{sub}(\Gamma \cup \Delta)$.
- Il existe $\sigma_0 \in S$ telle que $\Gamma \subseteq ant(\sigma_0)$ et $\Delta \subseteq suc(\sigma_0)$.
- Pour tout $\sigma \in S$, si $\Box \mathrm{A} \in suc(\sigma)$ alors il existe $\sigma' \in S$ tel que $\sigma R \sigma'$ et $\mathrm{A} \in suc(\sigma')$.
- Pour tous les $\sigma, \sigma' \in S$, si $\sigma R \sigma'$ et $\Box \mathrm{A} \in ant(\sigma)$ alors $\Box \mathrm{A} \in ant(\sigma')$.

QUESTION 22. Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ a un graphe alors

$$(\bigwedge_{\mathrm{A}\in\Gamma} \mathrm{A}) \wedge (\bigwedge_{\mathrm{B}\in\Delta} \neg \mathrm{B})$$

est satisfaisable. L'opérateur "$\bigwedge$" dénote l'opérateur généralisé de conjonction avec un nombre fini mais non borné d'arguments.

QUESTION 23. Montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est consistant alors $(\bigwedge_{\mathrm{A}\in\Gamma} \mathrm{A}) \wedge (\bigwedge_{\mathrm{B}\in\Delta} \neg \mathrm{B})$ est satisfaisable.

QUESTION 24. En déduire que A est un théorème de $\mathcal{SQ}$ si et seulement si A est valide.

QUESTION 25. On note $\mathcal{SQ}^+$ le calcul $\mathcal{SQ}$ augmenté de la règle de *coupure* ci-dessous :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathrm{A} \quad \Gamma, \mathrm{A} \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

1. Expliquer pourquoi la propriété pour $\mathcal{SQ}$ de la question 17 n'est pas vérifiée par $\mathcal{SQ}^+$.
2. Montrer que si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans $\mathcal{SQ}^+$ alors $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans $\mathcal{SQ}$, c'est-à-dire la règle de coupure n'augmente pas le pouvoir de déduction de $\mathcal{SQ}$.

FIN DE L'ÉPREUVE